Das Turnierproblem für Spiele zu je dreien

Rose Peltesohn

Das Turnierproblem für Spiele zu je dreien

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
genehmigt von der
Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

von

Rose Peltesohn
aus Berlin

Tag der Promotion: 6. Mai 1936
Tag der mündlichen Prüfung: 16. Januar 1936

1936

Druck der August Pries G·m·b·H in Leipzig

Referenten:

Professor Dr. Schur

Professor Dr. Erhard Schmidt

Einleitung.

Bei Schachturnieren ist es üblich, eine Anordnung der Spieler zu treffen, die folgenden Forderungen genügt: jeder Teilnehmer soll an jedem Tage gegen einen und nur einen andern spielen, und je zwei Teilnehmer sollen einmal und nur einmal gegen einander spielen. Die für diese Verteilung der Spieler notwendige Turniertabelle wird geliefert durch die Lösung folgender Aufgabe: sei $N = 2n$ eine gerade Anzahl, so sollen alle aus N Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_N$ ($a_\alpha \neq a_\beta$, wenn $\alpha \neq \beta$) zu bildenden Paare $a_\alpha a_\beta$ ($\alpha < \beta$) so in Abteilungen (*Zeilen*) zusammengefaßt werden, daß in jeder Zeile jedes Element a_ν genau einmal auftritt. (Die Zeilen entsprechen den Spieltagen.)

In früheren Zeiten wurde die Turniertabelle für jede gerade vorliegende Anzahl von Spielern empirisch gefunden. „Die rechtzeitige Eröffnung des Nürnberger Turniers 1883 schien fast in Frage gestellt, da Schachmeister Schallopp, der Verfertiger der Paarungstabellen, die in Frage kommenden Tabellen zu Hause vergessen hatte" (W. Ahrens)[1]). Wenige Jahre nach dem Nürnberger Turnier wurde diese Frage methodisch in Angriff genommen. L. Schurig ist, wie Ahrens vermutet, der erste gewesen, der für beliebiges $N = 2n$ Paarungstabellen aufstellte[2]). Unabhängig von ihm gab die gleiche Lösung des Problems R. Remak[3]). Eine weitere Lösung von Walecki ist zu erwähnen.

Ist die Teilnehmerzahl $N = 2n + 1$ (ungrade), so hilft man sich, indem man zu den N Spielern einen „blinden" Spieler hinzunimmt und für diese $2n + 2$ Spieler die Paarungstabelle aufstellt. Der Blinde spielt an jedem der $2n + 1$ Spieltage, und zwar an jedem mit einem andern der $2n + 1$ Teilnehmer. Bestimmt man, daß für den mit ihm kombinierten Spieler der Tag spielfrei ist, so hat jeder Teilnehmer während des ganzen Turniers genau einen spielfreien Tag. Die Symmetrie der Tabelle in bezug auf die $2n + 1$ Teilnehmer ist also erreicht.

Das hier berührte Problem ist der Verallgemeinerung fähig: man betrachte Spiele, bei denen nicht, wie beim Schachspiel, *zwei* Teilnehmer gegen einander

1) Mathematische Unterhaltungen II, Berlin 1918, S. 85.
2) Deutsche Schachzeitung, Bd. 41, 1886 und Bd. 49, 1894.
3) Brief an Ahrens, 1907.

spielen, sondern bei denen eine Spielmannschaft von 3, 4, ..., k Personen gebildet wird (Terzett-, Quartett-, ..., k-ett-Spiele). Dann kann man sich die Frage stellen, auf welche Weise man k-ett-Turniere mit $N = n \cdot k$ Teilnehmern abhalten soll. Offenbar sind von den möglichen Forderungen die beiden folgenden am meisten berechtigt:

(A): jeder Spieler soll mit jedem andern einmal und nur einmal zusammen spielen oder (B): jede mögliche Kombination von k Spielern soll einmal und nur einmal auftreten.

Außerdem soll an jedem Spieltag jeder Spieler beschäftigt sein (C).

$k = 3$ verdient als kleinste Zahl, für die die Forderungen (A) und (B) nicht identisch sind, besonderes Interesse. (C) ist hier nur für $N \equiv 0 \pmod{3}$ erfüllbar.

Sollen (A) und (C) erfüllt werden, so ist das Problem mit Kirkmans berühmten Schulmädchenproblem in der verallgemeinerten Form identisch. (Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit ist hier bekanntlich, daß N ungrade ist.)

Im folgenden soll gezeigt werden, daß für jedes $N \equiv 0 \pmod{3}$ (B) und (C) erfüllbar sind, d. h. ein Terzett-(z. B. Skat-)Turnier mit $N = 3n$ Teilnehmern läßt sich so abhalten, daß jede Kombination von drei Teilnehmern einmal und nur einmal spielt und daß jeder Teilnehmer an jedem Spieltage einmal und nur einmal spielt. Wir können diesen Satz in folgender Form aussprechen:

Gegeben seien $N = 3n$ voneinander verschiedene Elemente $a_1, a_2, .., a_N$. Betrachtet man die aus drei verschiedenen dieser Elemente gebildeten Tripel $a_\alpha\, a_\beta\, a_\gamma$ dann und nur dann als gleich, wenn sie sich nur durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden, so lassen sich die voneinander verschiedenen Tripel so in Abteilungen zu je n zusammenfassen, daß in jeder Abteilung jedes Element a_ν genau einmal auftritt.

Eine solche Abteilung wollen wir eine Zeile nennen. Da a_1 in jeder Zeile genau einmal auftreten soll, muß es genau so viel Zeilen geben wie Paare aus den übrigen Elementen $a_2, \ldots, a_N$, mit denen a_1 kombiniert werden kann, d. h. $\binom{N-1}{2}$.

Im folgenden soll eine solche Verteilung der Tripel auf Zeilen eine V-Verteilung für N oder für die N Elemente heißen.

Ist der Satz bewiesen, so macht auch die Frage nach einer Verteilung von $N_1 = 3n - 1$ bzw. $N_2 = 3n - 2$ Spielern so, daß (B) erfüllt ist, keine Schwierigkeiten.

Im ersten Fall bildet man die Tabelle für die $N_1 + 1$ Spieler $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}, x$. An jedem Tage spielt x, und zwar an jedem Tage mit einem andern der aus den Spielern $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}$ zu bildenden Paare $a_\alpha a_\beta$ $(\alpha < \beta)$. Diesem Paare gibt man den Tag spielfrei, so daß während des ganzen Turniers jeder Spieler $N_1 - 1$ freie Tage hat.

Im zweiten Fall fügt man die „Blinden" x und y hinzu. An N_2 Tagen spielt das Tripel $x y a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N_2)$. An diesem Tag hat jeweils der Spieler a_ν spielfrei. An den übrigen $\binom{N_2}{2}$ Tagen spielen sowohl x als auch y mit einem der Paare $a_\alpha a_\beta$ bzw. $a_\gamma a_\delta$ $(\alpha < \beta, \gamma < \delta)$. Diesen vier Teilnehmern $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma$ und a_δ gibt man den Tag spielfrei, so daß während des ganzen Turniers jeder Teilnehmer $2N_2 - 1$ freie Tage hat.

Die Frage, ob man vielleicht für N_2 eine Verteilung der Spieler in der Weise erreichen könnte, daß nicht an gewissen Tagen vier Spieler frei sind, sondern daß an *jedem* Tag nur ein Spieler unbeschäftigt ist, hat weniger Interesse, zumal da eine leichte Anzahlbetrachtung zeigt, daß dies für ungerade N_2 nicht möglich ist. Denn die $\binom{N_2}{3}$ Tripel aus N_2 Teilnehmern müßten zu je $\frac{N_2 - 1}{3}$ auf Spieltage verteilt werden, d. h. es wäre zu verlangen:

$$\frac{N_2 - 1}{3} \Big/ \binom{N_2}{3},$$

$$2/N_2\,(N_2 - 2).$$

I. Kapitel.

Einteilung der Tripel in Klassen. Die Fälle $N = 3$, 9 und 15.

§ 1. Einteilung der Tripel in Klassen.

Ist die Anzahl N der Elemente $= 3$, 9 oder 15, so werden wir N aus dem allgemeinen Beweise ausschließen müssen. Deswegen wollen wir den Beweis für diese N dadurch vorwegnehmen, daß wir für sie eine V-Verteilung angeben. Zu diesem *und nur zu diesem* Zwecke teilen wir die Tripel auf folgende Weise in Klassen ein.

1.

Aus den $\binom{N}{3}$ Tripeln von N Elementen greifen wir ein beliebiges $a_\alpha a_\beta a_\gamma$ heraus und fassen alle $a_{\alpha+\iota} a_{\beta+\iota} a_{\gamma+\iota}$ zu einer Klasse zusammen. Hierbei durchläuft ι die Werte $0, 1, \ldots, N - 1$; alle auftretenden Indizes werden, wie auch im folgenden, mod. N reduziert.

Ist damit der Vorrat noch nicht erschöpft, so greifen wir aus dem Rest ein zweites Tripel heraus, bilden auf dieselbe Weise die zugehörige Klasse usf., bis jedes Tripel in einer Klasse untergebracht ist. Es ist klar, daß zwei Klassen entweder alle ihre Tripel gemeinsam haben oder keins.

2.

Jede Klasse enthält N Tripel; diese müssen aber nicht notwendig alle voneinander verschieden sein. Betrachten wir nun den Fall, daß eine Klasse K zwei gleiche Tripel enthält. Das bedeutet: es existiert eine Zahl ν und in K gibt es zwei Tripel $a_\alpha a_\beta a_\gamma$ und $a_{\alpha+\nu} a_{\beta+\nu} a_{\gamma+\nu}$, so daß

$$a_\alpha a_\beta a_\gamma = a_{\alpha+\nu} a_{\beta+\nu} a_{\gamma+\nu}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &\equiv \alpha+\beta+\gamma+3\nu && (\text{mod. } N)\\ 3\nu &\equiv 0 && (\text{mod. } N)\\ \nu &\equiv 0,\ n \text{ oder } 2n && (\text{mod. } N). \end{aligned}$$

1. $\nu \equiv 0$: dies führt auf die triviale Forderung, daß $a_\alpha a_\beta a_\gamma = a_\alpha a_\beta a_\gamma$ sein soll.

2. $\nu \equiv n$: hier muß entweder $\beta \equiv \alpha + n$ oder $\gamma \equiv \alpha + n$ sein.

Wegen der Vertauschbarkeit der Elemente eines Tripels kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen: $\beta \equiv \alpha + n$
Da $\gamma \not\equiv \gamma + n$ und $\gamma \not\equiv \beta \equiv \alpha + n$, muß sein: $\gamma \equiv \beta + n$
Daraus folgt: $\alpha \equiv \gamma + n$.

3. $\nu \equiv 2n \equiv -n$: $\beta \equiv \alpha - n$ oder $\gamma \equiv \alpha - n$.

Wählt man hier: $\gamma \equiv \alpha - n$, so ergeben sich die gleichen Bedingungen wie in 2.

2. und 3. führen also auf dieselbe Klasse K_0, die auch wirklich existiert. K_0 besteht aus den n Tripeln:

$$\begin{gathered} a_1 a_{n+1} a_{2n+1},\\ a_2 a_{n+2} a_{2n+2},\\ \vdots\\ a_n a_{2n} a_{3n}. \end{gathered}$$

Jede andere Klasse besteht aus $N = 3n$ voneinander verschiedenen Tripeln.

3.

Teilt man die Peripherie eines Kreises in N gleiche Teile und ordnet die Elemente $a_1, \ldots, a_N$ unter Erhaltung ihrer Reihenfolge (etwa im positiven

Drehungssinn) auf den Teilpunkten an, so entspricht jedem Tripel ein System von drei Radien, die zu den entsprechenden Teilpunkten hinführen.

Zwei Tripel liegen dann und nur dann in einer Klasse, wenn die entsprechenden Radiensysteme durch Drehung ineinander übergeführt werden können. Man erhält alle Klassen, wenn man alle möglichen Radiensysteme bildet, für die zwischen je zwei Radien eine ganze Anzahl von Teilen der Peripherie liegt und die nicht durch Drehung ineinander übergeführt werden können. Erfüllen zwei Systeme die letzte Bedingung, so wollen wir sie „voneinander verschieden“ nennen.

Nun können wir uns auf die Betrachtung derjenigen Anzahlen von Peripherieteilen beschränken, die von je zwei *benachbarten* Radien eingeschlossen werden. Seien dies für eine beliebige Klasse die Anzahlen D_1, D_2, D_3 (etwa im positiven Drehungssinne aufgezählt), so ist natürlich $D_1 + D_2 + D_3 = N$. Die durch dieses Radiensystem definierte Klasse wollen wir (D_1, D_2, D_3) nennen; sie ist offenbar mit (D_2, D_3, D_1) und (D_3, D_1, D_2) identisch, so daß also jeder Zerlegung von N in drei positive ganze Summanden eine Klasse entspricht, aber jeder Klasse mehrere Zerlegungen.

Zwei Zerlegungen von N stellen höchstens dann dieselbe Klasse dar, wenn die drei Summanden in ihrer Gesamtheit in beiden Fällen dieselben sind. Daß gerade Permutationen der Summanden D_1, D_2, D_3 auf die gleiche Klasse führen, sahen wir bereits; sind mindestens zwei der drei Summanden einander gleich, so führt auch jede ungrade Permutation der D_ν auf die gleiche Anordnung der D_ν wie eine gewisse gerade und damit auf dieselbe Klasse. Sind aber alle drei Summanden voneinander verschieden, so sind offenbar die beiden Radiensysteme der Klassen $(D_1, D_2, D_3) = (D_2, D_3, D_1) = (D_3, D_1, D_2)$ und $(D_1, D_3, D_2) = (D_2, D_1, D_3) = (D_3, D_2, D_1)$ durch keine Drehung miteinander zur Deckung zu bringen.

Wir erhalten also alle Klassen (D_1, D_2, D_3), und zwar jede genau einmal, wenn wir N auf alle möglichen Arten in drei positive ganze Summanden D_1, D_2 und D_3 zerlegen und von allen Zerlegungen, die durch zyklische Vertauschungen der Summanden aus einander hervorgehen, nur je eine bestehen lassen.

§ 2. Die Fälle $N = 3$, 9 und 15.

Der Fall $N = 3$, für den die Tabelle eine einzige Zeile mit einem einzigen Tripel enthält, ist trivial.

1.

Für $N = 9$ treten die folgenden Klassen auf:

	K_1	K_2	K'_2	K_3	K'_3	K_4	K_5	K_6	K'_6	K_0
D_1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3
D_2	1	2	6	3	5	4	2	3	4	3
D_3	7	6	2	5	3	4	5	4	3	3

Im folgenden sollen statt der Elemente a_ν nur die Indizes ν geschrieben werden.

Eine V-Verteilung ist:

$(1 + \iota)$. Zeile ($\iota = 0, 1, \ldots, 8$; ι ist innerhalb einer Zeile konstant. Die Indizes sind mod. 9 zu reduzieren):

$7 + \iota, 8 + \iota, 1 + \iota \qquad 2 + \iota, 3 + \iota, 9 + \iota \qquad 4 + \iota, 5 + \iota, 6 + \iota.$

Hierbei bilden die Tripel $7 + \iota, 8 + \iota, 1 + \iota$ genau die Klasse K_2, die Tripel $2 + \iota, 3 + \iota, 9 + \iota$ die Klasse K'_2 und die Tripel $4 + \iota, 5 + \iota, 6 + \iota$ die Klasse K_1. Es sind also alle Tripel der Klassen K_2, K'_2 und K_1 auf die 1.—9. Zeile verteilt worden.

$(10 + \iota)$. Zeile: (K_3, K'_3, K_4)

$2 + \iota, 3 + \iota, 6 + \iota \qquad 7 + \iota, 8 + \iota, 4 + \iota \qquad 9 + \iota, 1 + \iota, 5 + \iota$

$(19 + \iota)$. Zeile: (K_6, K'_6, K_5)

$8 + \iota, 1 + \iota, 4 + \iota \qquad 9 + \iota, 2 + \iota, 6 + \iota \qquad 3 + \iota, 5 + \iota, 7 + \iota$

28. Zeile: (K_0)

1 4 7 2 5 8 3 6 9.

2.

Für $N = 15$ treten die folgenden Klassen auf:

	K_1	K_2	K'_2	K_3	K'_3	K_4	K'_4	K_5	K'_5	K_6	K'_6	K_7	K_8	K_9	K'_9
D_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
D_2	1	2	12	3	11	4	10	5	9	6	8	7	2	3	10
D_3	13	12	2	11	3	10	4	9	5	8	6	7	11	10	3

	K_{10}	K'_{10}	K_{11}	K'_{11}	K_{12}	K'_{12}	K_{13}	K_{14}	K'_{14}	K_{15}	K'_{15}	K_{16}	K_{17}	K_{18}	K'_{18}	K_0
D_1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	5
D_2	4	9	5	8	6	7	3	4	8	5	7	6	4	5	6	5
D_3	9	4	8	5	7	6	9	8	4	7	5	6	7	6	5	5

Folgendes ist eine V-Verteilung (statt der Elemente werden wieder nur ihre Indizes geschrieben):

1. Zeile: (K_0)

1 6 11 2 7 12 3 8 13 4 9 14 5 10 15

Die nun folgenden Zeilen entsprechen der 1.—27. Zeile der Tabelle für $N = 9$. $+ \iota$ hinter jedem Index ist fortgelassen.

2.—16. Zeile:

10 11 15 5 6 1 13 14 4 2 3 12 7 8 9 $(K_4, K_4', K_5, K_5', K_1)$

17.—31. Zeile:

12 14 3 2 4 13 9 11 1 5 7 15 6 8 10 $(K_{10}, K_{10}', K_{11}, K_{11}', K_8)$

32.—46. Zeile:

3 4 10 12 13 6 14 1 7 15 2 9 5 8 11 $(K_6, K_6', K_{12}, K_{12}', K_{13})$

47.—61. Zeile:

1 3 6 13 15 10 2 5 9 11 14 7 4 8 12 $(K_9, K_9', K_{14}, K_{14}', K_{17})$

62.—76. Zeile:

10 11 13 5 6 3 1 4 9 12 15 7 14 2 8 $(K_2, K_2', K_{15}, K_{15}', K_{16})$

77.—91. Zeile:

3 4 7 12 13 9 2 6 11 10 14 5 15 1 8 $(K_3, K_3', K_{18}, K_{18}', K_7)$

II. Kapitel.

Der Beweis des Satzes für $N \neq 3$, 9 oder 15.

Da für $N = 3$ eine V-Verteilung existiert, dürfen wir die Existenz einer V-Verteilung für jedes $M = 3m < N$ voraussetzen, wenn wir ihre Existenz für $N = 3n$ beweisen wollen.

Die Zeilen einer V-Verteilung für N wollen wir im Gegensatz zu den Zeilen der Verteilungen für $M < N$ „große" Zeilen[4]) nennen.

§ 1. Einteilung der Tripel in Typen.

Wir teilen die $N = 3n$ Elemente in drei Gruppen ein:

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n;$$
$$b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n;$$
$$c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n.$$

4) Jede von ihnen entspricht einem der $\binom{N-1}{2}$ Spieltage.

Dann unterscheiden wir fünf verschiedene Typen von Tripeln:

(1a): $a_\varkappa b_\lambda c_\mu$ $\qquad (\varkappa \neq \lambda,\ \varkappa \neq \mu,\ \lambda \neq \mu)$

(1b): $a_\varkappa b_\varkappa c_\lambda$ (bzw. $a_\varkappa b_\lambda c_\varkappa$ und $a_\lambda b_\varkappa c_\varkappa$) $\qquad (\varkappa \neq \lambda)$

(1c): $a_\varkappa b_\varkappa c_\varkappa$

(2): $a_\varkappa a_\lambda b_\mu$ (bzw. $a_\varkappa a_\lambda c_\mu$, $b_\varkappa b_\lambda a_\mu$, . ., $c_\varkappa c_\lambda b_\mu$) $\qquad (\varkappa < \lambda,\ \mu$ beliebig)

(3): $a_\varkappa a_\lambda a_\mu$ (bzw. $b_\varkappa b_\lambda b_\mu$ und $c_\varkappa c_\lambda c_\mu$) $\qquad (\varkappa < \lambda < \mu)$.

Betrachten wir nun die Tripel vom Typ (1a). Offenbar kann man für feste $\varkappa$, λ, μ alle $a_{\varkappa+\iota} b_{\lambda+\iota}\, c_{\mu+\iota}$ ($\iota = 0, 1, \ldots, n-1$; die Indizes sind hier und im folgenden überall mod. n zu reduzieren) zu einer großen Zeile zusammenfassen. Für diese sind die Differenzen $\lambda - \varkappa \equiv \delta_1$, $\mu - \lambda \equiv \delta_2$, $\varkappa - \mu \equiv \delta_3$ charakteristisch. Alle drei δ_a sind inkongruent 0 (mod. n), aber $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \equiv 0$ (mod. n). Bilden wir die Zeile wirklich, so heiße sie $Z(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$; die Gesamtheit ihrer Tripel nennen wir $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Sollen $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ und $(\delta_1', \delta_2', \delta_3')$ einander gleich sein, so muß offenbar $\delta_1 \equiv \delta_1'$, $\delta_2 \equiv \delta_2'$ und $\delta_3 \equiv \delta_3'$ sein. Wir erhalten also alle zulässigen verschiedenen Systeme $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, indem wir δ_1 und δ_2 einzeln zwischen 1 und $n-1$ variieren, doch so, daß stets $\delta_1 + \delta_2 \not\equiv 0$ (mod. n). Demnach ist die Anzahl der verschiedenen $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ gleich $(n-1)(n-2)$.

§ 2. Die Verteilung der Tripel (1b), (1c) und (3).

1.

$n \equiv 0$ (mod. 3):

Da $n < 3n$ ist, können wir eine V-Verteilung für n bilden, deren Zeilen alle Tripel $a_\varkappa a_\lambda a_\mu$ ($\varkappa < \lambda < \mu$) enthalten. Die entsprechenden Zeilen bilden wir aus den b_ν und aus den c_ν. Zu einer großen Zeile fassen wir je drei dieser Zeilen zusammen: eine aus den a_ν, eine aus den b_ν und eine aus den c_ν. Damit sind alle Tripel vom Typ (3) verteilt.

Aus den Tripeln (1c) bilden wir eine weitere Zeile.

Vom Typ (1b) fassen wir alle $a_\varkappa b_\varkappa c_{\varkappa+a}$ mit festem a ($\varkappa = 1, 2, \ldots, n$) zu einer Zeile zusammen. a nimmt nacheinander die Werte $1, 2, \ldots, n-1$ an. Dann sind alle $a_\varkappa b_\varkappa c_\lambda$ ($\varkappa \neq \lambda$) untergebracht. Ebenso verfährt man mit den $a_\varkappa b_{\varkappa+a} c_\varkappa$ und mit den $a_{\varkappa+a} b_\varkappa c_\varkappa$. Damit ist (1b) erledigt.

2.

$n \equiv -1 \pmod{3}$:

Es ist $n + 1 < 3n$ für alle positiven ganzen n.

Wir führen ein Hilfselement x ein und bilden eine V-Verteilung für die $n+1$ Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ und die gleiche für die b_ν und x sowie für die c_ν und x. Dann fassen wir (um zunächst die Tripel (3) zu verteilen) je drei *entsprechende* Zeilen dieser Verteilungen zusammen. Hierbei sind die mit x kombinierten Elemente $a_\varkappa, a_\lambda$; $b_\varkappa, b_\lambda$; $c_\varkappa, c_\lambda$ übrig, wobei jedes Wertepaar $(\varkappa, \lambda)$ mit $1 \leqq \varkappa < \lambda \leqq n$ genau einmal auftritt.

Um diese (nach Weglassung der drei das Element x enthaltenden Tripel) aus den Tripeln (3) gebildeten Reihen zu großen Zeilen zu vervollständigen, fügen wir immer zu derjenigen, in der $a_\varkappa, a_\lambda, b_\varkappa, b_\lambda, c_\varkappa, c_\lambda$ fehlen, noch die Tripel $a_\varkappa b_\varkappa c_\lambda$ und $a_\lambda b_\lambda c_\varkappa$ hinzu. Nun ist (3) erledigt; vom Typ (1b) sind noch die $a_\varkappa b_\lambda c_\varkappa$ und die $a_\lambda b_\varkappa c_\varkappa$ $(\varkappa \neq \lambda)$ übrig. Diese verteilen wir wie in 1. auf große Zeilen. Ebenfalls wie in 1. bilden wir die Zeile aus den Tripeln (1c).

3.

$n \equiv 1 \pmod{3}$:

Es ist $n + 2 < 3n$ für $N > 3$.

Wir führen hier zwei Hilfselemente x und y ein und bilden eine V-Verteilung für die $n+2$ Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n, x, y$. In n Zeilen dieser Verteilung tritt das Tripel $x y a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ auf, in den $\binom{n}{2}$ übrigen Zeilen tritt ein Tripel $x a_\alpha a_\beta$ und ein Tripel $y a_\gamma a_\delta$ auf. Hierbei durchläuft sowohl das Paar (α, β) als auch das Paar (γ, δ) alle Paare $(\varkappa, \lambda)$, wo $\varkappa < \lambda$ ist. Nun fassen wir (um zunächst die Tripel (3) zu verteilen) wieder die Zeilen dieser Verteilung für die a_ν, x und y mit den entsprechenden der gleichen Verteilung für die b_ν, x und y sowie für die c_ν, x und y zusammen.

Die Zeile mit $x y a_\nu$ (bzw. $x y b_\nu$, $x y c_\nu$) liefert eine große Zeile, in der noch a_ν, b_ν und c_ν fehlen. Hier ersetzen wir diese drei Tripel, in denen x und y auftreten, durch das Tripel $a_\nu b_\nu c_\nu$. Damit ist (1c) verteilt.

Die Zeile, in der $x a_\alpha a_\beta$ und $y a_\gamma a_\delta$ (bzw. $x b_\alpha b_\beta$ und $y b_\gamma b_\delta$, $x c_\alpha c_\beta$ und $y c_\gamma c_\delta$) auftreten, liefert (nach Weglassen dieser mit x bzw. y behafteten Tripel) eine große Zeile, in der noch die 12 Elemente $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma, a_\delta, b_\alpha, b_\beta, b_\gamma, b_\delta, c_\alpha, c_\beta, c_\gamma, c_\delta$ fehlen. Hier fügen wir die vier Tripel $a_\alpha b_\alpha c_\beta$, $a_\beta b_\beta c_\alpha$, $a_\gamma b_\delta c_\gamma$ und $a_\delta b_\gamma c_\delta$ hinzu. Da (α, β) und (γ, δ) alle Paare $(\varkappa, \lambda)$ mit $\varkappa < \lambda$ durchlaufen, sind nun alle $a_\varkappa b_\varkappa c_\lambda$ und $a_\varkappa b_\lambda c_\varkappa$ erledigt, wo $\varkappa \neq \lambda$ ist. Vom Typ (1b) bleiben noch die $a_\lambda b_\varkappa c_\varkappa$ $(\varkappa \neq \lambda)$, die man wie in 1. verteilt.

Wäre im Fall 1 der Typ (3) leer, so müßte $n = 0$ sein; das ist ausgeschlossen. Ist in 2. der Typ (3) leer (was nur für $n=2$ möglich ist), so erledigen wir (1b) und (1c) unabhängig von (3) wie in 1. Im Fall 3 verlangt die Methode, daß $n + 2 \geqq 6$. Auszuschließen ist also nur der triviale Fall $n = 1$.

§ 3. Die Verteilung der Tripel (1a) und (2).

Wir werden nun die Lösung des Turnierproblems für das Schachspiel, d. h. die Verteilung der Paare von Elementen auf Zeilen, benutzen. Diese Zeilen wollen wir Paarzeilen nennen. Der Vollständigkeit wegen sei eine solche Verteilung angegeben[5]). Die Anzahl der Elemente sei $2m$, also die Anzahl der Paarzeilen $2m - 1$. Statt der Elemente a_ν schreiben wir nur ihre Indizes ν.

1. Zeile:	$2m$ 1	2 $2m-1$	3 $2m-2$	....	m $m+1$
2. Zeile:	$2m$ 2	3 1	4 $2m-1$	....	$m+1$ $m+2$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$2m-2$. Zeile:	$2m$ $2m-2$	$2m-1$ $2m-3$	1 $2m-4$	....	$m-2$ $m-1$
$2m-1$. Zeile:	$2m$ $2m-1$	1 $2m-2$	2 $2m-3$	....	$m-1$ m

1.

$n \equiv 0 \pmod{2}$:

Von n Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$) gibt es $n - 1$ Paarzeilen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ (bzw. $B_1, \ldots$; $C_1, \ldots$). In jeder Paarzeile A_ω (bzw. B_ω; C_ω) treten $\frac{n}{2}$ Paare $p_1^{(\omega)}, p_2^{(\omega)}, \ldots, p_{\frac{n}{2}}^{(\omega)}$ (bzw. $q_1^{(\omega)}, \ldots$; $r_1^{(\omega)}, \ldots$) auf. Die Numerierung der Paare innerhalb der Paarzeilen ist beliebig. Jede Paarzeile A_ω enthält jedes Element a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) und das System aller A_ω enthält jedes Paar $a_\alpha a_\beta$ ($\alpha < \beta$) genau einmal. Entsprechendes gilt für die B_ω und für die C_ω.

Zunächst verteilen wir vom Typ (2) die Tripel $a_\varkappa a_\lambda c_\mu$ und $b_\varkappa b_\lambda c_\mu$ ($\varkappa < \lambda$, μ beliebig). Hierzu fassen wir die Paarzeilen A_ω und B_ω in $n - 1$ Paare $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_{n-1}B_{n-1}$ zusammen. Nun wird jedes $p_\sigma^{(\omega)}$ und jedes $q_\tau^{(\omega)}$ ($\sigma, \tau = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$; $\omega = 1, 2, \ldots, n-1$) mit je einem c_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, n$) innerhalb einer großen Zeile zu verbinden sein. Dies geschieht nach folgendem Schema R:

5) s. auch Ahrens, a. a. O. S. 86.

	$p_1^{(\omega)}$	$p_2^{(\omega)}$	$\ldots$	$p_{\frac{n}{2}}^{(\omega)}$	$q_1^{(\omega)}$	$q_2^{(\omega)}$	$\ldots$	$q_{\frac{n}{2}-1}^{(\omega)}$	$q_{\frac{n}{2}}^{(\omega)}$
1)	c_1	c_2	$\ldots$	$c_{\frac{n}{2}}$	$c_{\frac{n}{2}+1}$	$c_{\frac{n}{2}+2}$	$\ldots$	c_{n-1}	c_n
2)	c_2	c_3	$\ldots$	$c_{\frac{n}{2}+1}$	$c_{\frac{n}{2}+2}$	$c_{\frac{n}{2}+3}$	$\ldots$	c_n	c_1
$\vdots$	$\vdots$								
$n)$	c_n	c_1	$\ldots$	$c_{\frac{n}{2}-1}$	$c_{\frac{n}{2}}$	$c_{\frac{n}{2}+1}$	$\ldots$	c_{n-2}	c_{n-1}

Hierin steht in der Spalte unter jedem $p_\sigma^{(\omega)}$ und $q_\tau^{(\omega)}$ das Element c_μ, mit dem es verbunden wird; jede Reihe von R liefert eine große Zeile. Die χ. Reihe liefert die Zeile:

$$p_1^{(\omega)} c_\chi \quad p_2^{(\omega)} c_{\chi+1} \cdots p_{\frac{n}{2}}^{(\omega)} c_{\chi+\frac{n}{2}-1} \quad q_1^{(\omega)} c_{\chi+\frac{n}{2}} \cdots q_{\frac{n}{2}}^{(\omega)} c_{\chi+n-1}.$$

Offenbar ist durch R jedes $p_\sigma^{(\omega)}$ sowie jedes $q_\tau^{(\omega)}\left(\sigma,\ \tau = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right)$ mit jedem c_μ verbunden worden ($\mu = 1, 2, \ldots, n$).

Wir setzen nun in R nacheinander für ω die Indizes $1, 2, \ldots, n-1$ ein. Damit sind alle $a_\varkappa a_\lambda c_\mu$ und $b_\varkappa b_\lambda c_\mu$ ($\varkappa < \lambda$, μ beliebig) auf große Zeilen verteilt worden.

Ersetzen wir in R jedes $p_\sigma^{(\omega)}$ durch $q_\sigma^{(\omega)}$, jedes $q_\tau^{(\omega)}$ durch $r_\tau^{(\omega)}$ und jedes c_μ durch a_μ, so entsteht das Schema R', durch welches wir die Verteilung aller $b_\varkappa b_\lambda a_\mu$ und $c_\varkappa c_\lambda a_\mu$ auf große Zeilen gewinnen. Die Verteilung der $c_\varkappa c_\lambda b_\mu$ und der $a_\varkappa a_\lambda b_\mu$ erhalten wir analog, indem wir in R jedes $p_\sigma^{(\omega)}$ durch $r_\sigma^{(\omega)}$, jedes $q_\tau^{(\omega)}$ durch $p_\tau^{(\omega)}$ und jedes c_μ durch b_μ ersetzen. Damit sind alle Tripel vom Typ (2) verteilt.

Aus den Tripeln vom Typ (1a) bilden wir (nach der in Kapitel II, § 1 eingeführten Schreibweise) alle $Z(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

2.

$n \equiv 1 \pmod{2}$:

Wir operieren wieder mit einem Hilfselement x. Aus den $n+1 = 2k+2$ Elementen $a_1, \ldots, a_{2k+1}$, x bilden wir alle $2k+1$ Paarzeilen, analog aus den b_ν und x sowie aus den c_ν und x [6]). Jede Paarzeile soll durch das in ihr mit x

6) Hierbei benutzen wir in allen drei Fällen *dieselbe* „Schachturniertabelle".

gepaarte Element charakterisiert werden. Im Gegensatz zu 1. ist also die Numerierung der Paarzeilen nicht beliebig, sondern A_ω enthält nun bei uns für $\omega = 1, 2, \ldots, n$ das Paar $a_\omega x$ (B_ω enthält $b_\omega x$, C_ω enthält $c_\omega x$). Lassen wir nun immer das Paar $a_\omega x$ ($b_\omega x$, $c_\omega x$) ausfallen, so fehlt jedem A_ω (B_ω, C_ω) gerade das Element a_ω (b_ω, c_ω); die übrigen Elemente a_ν (b_ν, c_ν) ($\nu \neq \omega$) sind in A_ω (B_ω, C_ω) zu k Paaren zusammengefaßt. Das System aller A_ω (B_ω, C_ω) enthält jedes Paar $a_\alpha a_\beta$ ($b_\alpha b_\beta$, $c_\alpha c_\beta$) mit $\alpha < \beta$ genau einmal. Die Paare jeder Paarzeile werden wieder beliebig numeriert: A_ω enthält die Paare $p_1^{(\omega)}, \ldots, p_k^{(\omega)}$, B_ω die Paare $q_1^{(\omega)}, \ldots, q_k^{(\omega)}$ und C_ω die Paare $r_1^{(\omega)}, \ldots, r_k^{(\omega)}$.

Nun wollen wir wieder zunächst die Tripel $a_\varkappa a_\lambda c_\mu$ und $b_\varkappa b_\lambda c_\mu$ ($\varkappa < \lambda$, μ beliebig) verteilen. Dazu benutzen wir folgende Schemata S_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, 2k+1$); zunächst

S_1:

	$p_1^{(1)}$	$p_2^{(1)}$	....	$p_k^{(1)}$	$q_1^{(2k+1)}$	$q_2^{(2k+1)}$	....	$q_k^{(2k+1)}$	nicht verwendet:
1)	c_3	c_4	....	c_{k+2}	c_{k+3}	c_{k+4}	....	c_1	c_2
2)	c_4	c_5	....	c_{k+3}	c_{k+4}	c_{k+5}	....	c_2	c_3
$\vdots$	$\vdots$								
$2k-2$)	c_{2k}	c_{2k+1}	....	c_{k-2}	c_{k-1}	c_k	....	c_{2k-2}	c_{2k-1}

	$p_1^{(1)}$	$p_2^{(1)}$	....	$p_k^{(1)}$	$q_1^{(2k)}$	$q_2^{(2k)}$	....	$q_k^{(2k)}$	nicht verwendet:
$2k-1$)	c_{2k+1}	c_1	....	c_{k-1}	c_{k+1}	c_{k+2}	....	c_{2k}	c_k

	$p_1^{(1)}$	$p_2^{(1)}$	....	$p_k^{(1)}$	$q_1^{(2)}$	$q_2^{(2)}$	....	$q_k^{(2)}$	nicht verwendet:
$2k$)	c_1	c_2	....	c_k	c_{k+2}	c_{k+3}	....	c_{2k+1}	c_{k+1}
$2k+1$)	c_2	c_3	....	c_{k+1}	c_{k+3}	c_{k+4}	....	c_1	c_{k+2}

Jede Reihe χ) ($\chi = 1, 2, \ldots, 2k+1$) liefert eine große Zeile, nur fehlt in jeder von ihnen noch ein Tripel: es sind der Reihe nach die Tripel:

$$a_1 b_{2k+1} c_2,\quad a_1 b_{2k+1} c_3,\quad \ldots,\quad a_1 b_{2k+1} c_{2k-1};$$
$$a_1 b_{2k} c_k;$$
$$a_1 b_2 c_{k+1},\quad a_1 b_2 c_{k+2}.$$

Alle diese Tripel gehören für $k > 1$ zu (2). Wir fügen zu jeder Reihe χ) das fehlende Tripel hinzu und erhalten auf diese Weise $2k+1$ große Zeilen.

Die übrigen Schemata S_ϱ ($\varrho = 2, 3, \ldots, 2k+1$) erhalten wir, indem wir in S_1 jedes c_μ durch $c_{\mu+\varrho-1}$, jedes $p_\sigma^{(1)}$ durch $p_\sigma^{(\varrho)}$ und jedes $q_\tau^{(\omega)}$ durch $q_\tau^{(\omega+\varrho-1)}$ ersetzen. Die Reihen von S_ϱ ($2 \leqq \varrho \leqq 2k+1$) ergeben analog, durch die passenden Tripel ergänzt, große Zeilen.

In der linken Hälfte von S_1 tritt jedes c_μ einmal zu $p_1^{(1)}$ (erste Spalte), einmal zu $p_2^{(1)}$ (zweite Spalte), ..., einmal zu $p_k^{(1)}$ (k. Spalte). Es sind also alle Paare $p_\sigma^{(1)}$ durch S_1 mit allen c_μ verbunden worden. Ebenso werden durch die linken Hälften von $S_2, S_3, \ldots, S_{2k+1}$ alle $p_\sigma^{(2)}, p_\sigma^{(3)}, \ldots, p_\sigma^{(2k+1)}$ mit allen c_μ verbunden. Es sind also alle $a_\varkappa a_\lambda c_\mu$ ($\varkappa < \lambda$, μ beliebig) auf große Zeilen verteilt worden.

Nun haben wir zu zeigen, daß auch alle $b_\varkappa b_\lambda c_\mu$ untergebracht sind: daß also alle Paare $q_\tau^{(\omega)}$ mit allen c_μ verbunden worden sind. Da durch die Aufstellung der Tabellen $S_1, \ldots, S_{2k+1}$ alle Indizes gleichberechtigt sind, genügt es, dies für ein beliebiges ω, etwa $\omega = 2k+1$, zu beweisen.

$q_\tau^{(2k+1)}$ tritt in folgenden Reihen der S_ϱ auf ($\tau = 1, 2, \ldots, k$):

1), 2), ..., $2k-2$)	von S_1,
$2k-1$)	von S_2,
$2k$) und $2k+1$)	von S_{2k}.

In den genannten Reihen von S_1 wird $q_1^{(2k+1)}$ mit $c_{k+3}, c_{k+4}, \ldots, c_{k-1}$, in der von S_2 mit c_{k+2} und in den beiden von S_{2k} mit c_k und c_{k+1} verbunden, also mit jedem c_μ genau einmal. Ebenso geht es den übrigen $q_\tau^{(2k+1)}$ ($2 \leqq \tau \leqq k$). Denn die τ. Spalte der rechten Hälfte jeder Tabelle S_ϱ enthält in jeder Reihe das Element $c_{\mu+\tau-1}$, wenn die erste Spalte dieser rechten Hälfte c_μ enthält. Die τ. Elemente der rechten Hälfte von 1), 2), ..., $2k-2$) aus S_1, von $2k-1$) aus S_2 und von $2k$) und $2k+1$) aus S_{2k} durchlaufen also ebenfalls alle c_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, n$).

Jedes $q_\tau^{(2k+1)}$ ist also mit jedem c_μ verbunden worden, also auch jedes $q_\tau^{(\omega)}$ ($\omega = 1, 2, \ldots, 2k$). Damit sind alle $b_\varkappa b_\lambda c_\mu$ untergebracht.

Ersetzen wir in den S_ϱ jedes $p_\sigma^{(\omega)}$ durch $q_\sigma^{(\omega)}$, jedes $q_\tau^{(\nu)}$ durch $p_\tau^{(\nu)}$ und jedes c_μ durch a_μ, so leisten die auf diese Weise entstehenden Schemata $S_1', S_2', \ldots, S_{2k+1}'$ die Verteilung aller $b_\varkappa b_\lambda a_\mu$ und $c_\varkappa c_\lambda a_\mu$. Ersetzen wir in den S_ϱ jedes $p_\sigma^{(\omega)}$ durch $r_\sigma^{(\omega)}$, jedes $q_\tau^{(\nu)}$ durch $p_\tau^{(\nu)}$ und jedes c_μ durch b_μ, so entstehen die Schemata S_ϱ'', mit deren Hilfe wir die $c_\varkappa c_\lambda b_\mu$ und $a_\varkappa a_\lambda b_\mu$ verteilen.

Damit sind alle Tripel vom Typ (2) verteilt.

Zu jeder Reihe der Schemata $S_\varrho^{(\alpha)}$ wurde ein Tripel $a_\varkappa b_\lambda c_\mu$ vom Typ (1a) (wenn $k > 2$) hinzugefügt, um sie zu einer großen Zeile zu vervollständigen. Es ist zunächst zu zeigen, daß diese Tripel für alle Reihen aller Schemata S_{ϱ_1}, S'_{ϱ_2} und S''_{ϱ_3} voneinander verschieden sind. Wir wollen die hinzugefügten Tripel Zusatztripel nennen.

Eine beliebige, aber feste Reihe χ) braucht in allen Tabellen $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$ die Zusatztripel $a_\varkappa b_\lambda c_\mu$ mit festem $\lambda - \varkappa$, $\mu - \lambda$ und $\varkappa - \mu$, d. h. genau ein bestimmtes System $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Das gleiche gilt natürlich für die Schemata $S'_1, S'_2, \ldots, S'_{2k+1}$ und für die $S''_1, S''_2, \ldots, S''_{2k+1}$. Wir haben also nur zu zeigen, daß die verwendeten Systeme $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ von Zusatztripeln in allen S_{ϱ_1}, S'_{ϱ_2} und S''_{ϱ_3} voneinander verschieden sind.

Die Schemata S_{ϱ_1} brauchen folgende Systeme $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ (angeordnet im Schema S)[7]):

S:

Reihe	1)	2)	3)	....	$2k-2$)	$2k-1$)	$2k$)	$2k+1$)
δ_1	$2k$	$2k$	$2k$	...	$2k$	$2k-1$	1	1
δ_2	2	3	4	...	$2k-1$	$k+1$	$k-1$	k
δ_3	$2k$	$2k-1$	$2k-2$	...	3	$k+2$	$k+1$	k

Ebenso stellen wir die Tabellen S' und S'' der von den S'_{ϱ_2} (bzw. S''_{ϱ_3}) verbrauchten Systeme $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ auf:

S':

Reihe	1)	2)	3)	....	$2k-2$)	$2k-1$)	$2k$)	$2k+1$)
δ_1	$2k$	$2k-1$	$2k-2$	...	3	$k+2$	$k+1$	k
δ_2	$2k$	$2k$	$2k$	...	$2k$	$2k-1$	1	1
δ_3	2	3	4	...	$2k-1$	$k+1$	$k-1$	k

S'':

Reihe	1)	2)	3)	....	$2k-2$)	$2k-1$)	$2k$)	$2k+1$)
δ_1	2	3	4	...	$2k-1$	$k+1$	$k-1$	k
δ_2	$2k$	$2k-1$	$2k-2$	...	3	$k+2$	$k+1$	k
δ_3	$2k$	$2k$	$2k$	...	$2k$	$2k-1$	1	1

7) Der Index δ_3, der ja wegen $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \equiv 0$ durch δ_1 und δ_3 mitbestimmt ist, wird nur zur besseren Übersicht mitgeführt.

Von den Systemen $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ aus S können keine zwei einander gleich sein. Denn die erste Reihe (die der δ_1) lehrt, daß keins der $2k-2$ ersten Systeme $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ einem der drei letzten gleich sein kann. Aus der δ_3-Reihe ersieht man, daß die $2k-2$ ersten $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ untereinander verschieden sind, ebenso die drei letzten. Analog erkennen wir, daß auch je zwei $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ aus S' und je zwei aus S'' voneinander verschieden sind.

Um zu zeigen, daß auch je zwei verschiedene der drei Tabellen S, S' und S'' keine gemeinsamen Systeme $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ haben, genügt es, dies für die beiden Tabellen S und S' zu beweisen. Ein Vergleich der δ_2-Zeilen von S und von S' zeigt, daß für $k > 2$ kein δ-System von S einem von S' gleich sein kann, mit Ausnahme des $(2k-2)$. von S und des $(2k-1)$. von S'. Aber auch diese sind für $k > 2$ voneinander verschieden, was ein Vergleich der beiden δ_3-Werte lehrt.

Damit haben wir gezeigt, daß für $k > 2$ alle verwendeten Systeme $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ von Zusatztripeln voneinander verschieden sind, d. h. daß die Verwendung der Schemata S_{ϱ_1}, S'_{ϱ_2} und S''_{ϱ_3} für die Unterbringung der Tripel (2) zulässig ist.

Gibt es noch Systeme $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ von Tripeln (1a), die hierbei nicht verwendet wurden, so bilden wir aus ihnen die zugehörigen $Z(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Damit sind auch die Tripel (1a) restlos verteilt.

Die Ausnahmen $k = 0$, 1 und 2 ergeben grade die Fälle $N = 3$, 9 und 15. Daß wir diese Ausnahmen machen müssen, liegt nicht an der speziellen Wahl der Elemente und Paare von Elementen in den S_{ϱ_1}, S'_{ϱ_2} und S''_{ϱ_3} und kann sich keinesfalls durch Verwendung anderer Tabellen $S^{(\alpha)}_{\varrho}$ erübrigen. Eine leichte Betrachtung zeigt nämlich, daß es für zu kleine k nicht genügend Tripel (1a) gibt, um die Reihen der $S^{(\alpha)}_{\varrho}$ zu großen Zeilen zu vervollständigen. Es gibt $(n-1)(n-2)$ Systeme $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ für $2k+1 = n$, während die Schemata $S^{(\alpha)}_{\varrho}$ $3n$ Systeme verlangen. Das erste ganzzahlige k, für das die nötige Bedingung $3n \leqq (n-1)(n-2)$ erfüllt ist, ist aber $k = 3$.

Die vorstehende Betrachtung liefert nicht nur den Beweis dafür, daß es möglich ist, die verlangten Turniertabellen aufzustellen, sondern zugleich ein (wenn auch vielleicht mühsames) Verfahren dafür bei jedem gegebenem N. Denn das einzige nötige Hilfsmittel für die Aufstellung der Skatturniertabelle für $N = 3n$ ist neben der stets angebbaren Schachturniertabelle für $2\left\{\frac{n}{2}\right\}$ [8]) eine Skatturniertabelle für $N_1 = 3n_1$, wobei $n_1 = \left\{\frac{n}{3}\right\}$. Die letztere wird analog hergestellt aus einer Tabelle für $N_2 = 3n_2$ mit $n_2 = \left\{\frac{n_1}{3}\right\}$ usf. Die Folge von immer kleiner werdenden positiven ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ hat nur endlich viel Glieder (ihr letztes ist 1). Damit ist die Verwendbarkeit dieser Methode für die Aufstellung der Turniertabellen erwiesen.

---

8) Unter $\{m\}$ verstehen wir die kleinste ganze Zahl $\geqq m$.

Lebenslauf.

Am 16. Mai 1913 wurde ich, Rose Pauline Peltesohn, als Tochter des Arztes Dr. med. Ludwig Peltesohn und seiner Frau Cilly geb. Caro in Berlin geboren.

Am 5. März 1931 bestand ich die Reifeprüfung an der II. Städtischen Studienanstalt in Berlin. Im Frühjahr 1931 ließ ich mich an der Universität Berlin immatrikulieren, um Mathematik und Physik zu studieren.

Ich hörte die Vorlesungen und nahm teil an den Übungen bei folgenden Herren Professoren und Dozenten: Baumgardt, Bieberbach, Brauer, Diem, Feigl, Max Friedlaender, Gehrcke, Hammerstein, Hettner, Hochstetter, Köhler, Kohlschütter, v. Mises, Nernst, Orthmann, Erhard Schmidt, Schur, Spranger, Wehnelt und bei Frau Dr. Pollaczek.

Allen meinen verehrten Lehrern, insbesondre Herrn Professor Schur und Herrn Professor Schmidt, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen.